

Expansión de capacidad para un proceso, múltiples ítems y mezcla de tecnologías

Pablo Escalona y David Ramírez

Centro Integrado de Manufactura y Automatización CIMA-UTFSM,
Universidad Técnica Federico Santa María, Avenida España 1680, Valparaíso, Chile
pablo.escalona@usm.cl, davidramirez.sa@gmail.com

Resumen En este trabajo se presenta un modelo para determinar la estrategia de expansión óptima de un proceso, en términos de maquinaria, mano de obra y turnos de trabajo, en un entorno con demanda creciente en el largo plazo. El modelo permite la mezcla de tecnologías para la fabricación de múltiples ítems, de forma de satisfacer la demanda durante todo el horizonte de planificación. Al considerar el número de turnos en cada periodo del horizonte de planificación como una variable de decisión, el modelo resultante es de carácter no lineal en algunas de sus restricciones. Se plantea entonces un procedimiento iterativo de enumeración completa para transformarlo, en cada iteración, en un modelo determinístico de Programación Entera Mixta (MIP). La estrategia de expansión óptima es aquella que minimiza los costos totales de inversión en maquinaria y gastos operacionales en el largo plazo.

Keywords: Capacity Expansion, Machine Requirements Planning, workforce, work-shift, technology selection

1. Introducción

La decisión de cómo expandir la capacidad productiva en el tiempo es clave para las empresas manufactureras cuando se enfrentan a un escenario de demanda creciente en el largo plazo y sus instalaciones se encuentran cerca de su capacidad máxima. La estrategia de expansión deberá determinar el nivel de los distintos factores productivos en el tiempo, tales como el número de máquinas y operarios necesarios para cumplir con los requerimientos de producción.

En particular, se considera como objetivo determinar la estrategia de expansión óptima que minimiza el costo de adquisición de equipamiento, el costo de mano de obra y el costo de producción sobre un horizonte de planificación predefinido. Las variables de decisión en cada periodo del horizonte de planificación son (i) el número de máquinas necesarias para cumplir con los requerimientos de producción, (ii) el número de turnos y (iii) el número de operarios necesarios para satisfacer una demanda creciente de múltiples ítems a un costo mínimo.

Existen dos áreas directamente relacionadas con este trabajo, a saber, el problema de Planificación de Requerimiento de Máquina (MRP) y el problema de

Planificación de Expansión de Capacidad. En general, el problema de Requerimiento de Máquina puede ser definido como la especificación del número de máquinas de cada tipo requeridas en un proceso productivo en cada periodo del horizonte de planificación [8]. Mientras que el problema de Expansión de Capacidad consiste en determinar el tiempo, el tamaño y la localización de la expansión, como también el tipo de instalación productiva [6].

La literatura asociada al problema de expansión de capacidad es amplia, partiendo del trabajo de Manne [7]. Una recopilación de distintos modelos de expansión fue realizada por Luss [6] mientras que Li y Tirupati [5] entregan una descripción detallada de la forma en que ha evolucionado la literatura asociada a este problema. Muchos de estos papers consideran el problema de múltiples productos pero se restringen al prefijar el número de turnos y no lo consideran como decisión clave [10], [5]. Al incluir el número de turnos como variable de decisión, el problema de expansión de capacidad se hace más dificultoso [4], [11].

Hasta los años 70's la formulación de modelos asociados a MRP estaban confinados a modelos descriptivos, sin considerar ningún tipo de restricción. Miller y Davis [8] realizaron un completo análisis de este problema. Los desarrollos posteriores se realizaron usando modelos normativos en donde el número de máquinas es determinada optimizando una función objetivo, sujeta a una cantidad limitada de restricciones. Miller y Davis [9] desarrollaron un modelo con estructura de Programación Lineal en donde el problema MRP es analizado como un problema de asignación de recursos. Hayes, Davis y Wysk [4] investigan el problema de un sistema de múltiples centros de mecanizado con múltiples operaciones, usando una formulación basada en Programación Dinámica en el contexto de minimización de costos, siguiendo la estructura empleada por Davis y Miller [3]. Benezhad y Khoshnevis [1] desarrollaron un modelo que incorpora acumulación de inventarios y almacenamiento, lo que permite absorber fluctuaciones de demanda y reducir la frecuencia en la adquisición de equipamiento. Vander Veen y Jordan [12] desarrollaron un modelo para múltiples partes y piezas y múltiples tipos de máquinas, donde la capacidad de las máquinas es una función del costo de la máquina, además, estudiaron la relación entre la inversión y utilización en maquinaria. Tabucanon y Ong [11], utilizando como referencia el marco general del modelo propuesto por Hayes y Davis [4], plantean un modelo que expande la cobertura del problema de Requerimiento de Máquina hacia un sistema de manufactura de carácter multiproducto, multimáquina y multietapa. Behnehad y Khoshnevis [2] presentaron un modelo de programación matemática que abarca tanto el problema de Requerimiento de Máquina como el de Planificación Agregada, generando un modelo integrado.

El modelo desarrollado en este paper es de carácter multi-ítem, multi-tecnología y multi-periodo, pero al considerar el número de turnos en cada periodo del horizonte de planificación como una variable de decisión, adquiere carácter no lineal. Se plantea entonces un procedimiento iterativo de enumeración completa para transformarlo, en cada iteración, en un modelo determinístico de Programación Entera Mixta (MIP), que tiene por objetivo determinar la estrategia de expansión óptima, en términos del número de máquinas, el número de tur-

nos a trabajar y la mano de obra necesaria para satisfacer la demanda en cada periodo de planificación. Además, tiene las siguientes contribuciones, que en modelos anteriores no se han considerado simultáneamente. Primero, se considera el número de turnos como una variable de decisión en cada periodo del horizonte de planificación. Segundo, se considera el número de máquinas como variable de decisión. Tercero, se considera el costo de oportunidad por tener equipamiento ocioso en un periodo y cuarto, se permite la opción de mezclar tecnologías en el proceso para producir múltiples ítems, en múltiples periodos de planificación, es decir, se puede utilizar más de una tecnología para satisfacer los requerimientos de producción.

En la siguiente Sección se presenta la formulación del modelo matemático. En la Sección 3, se explica el método de resolución propuesto; la Sección 4 presenta los resultados en un aplicación industrial y se explora el impacto de los parámetros del problema en la solución óptima; finalmente, la Sección 5 entrega las conclusiones y futuros lineamientos de este trabajo.

2. Formulación del modelo

Se considera un escenario con $I(i = 1, \dots, I)$ ítems, $J(j = 1, \dots, J)$ tecnologías disponibles para la fabricación de estos ítems, y $T(t = 1, \dots, T)$ periodos en el horizonte de planificación. La demanda del ítem i en el periodo t se denota por d_{it} , y se asume conocida. Además, se supone que la demanda total para todos los ítems es creciente en el tiempo.

Se define r_{ij} como la razón de producción del ítem i producido con tecnología j , la que se supone conocida $\forall i, j$ y como restricción de diseño se define la utilización máxima para cada tecnología j , $\bar{\mu}_j$.

En este trabajo la capacidad de una máquina es medida en base al tiempo disponible por periodo, la que depende de las condiciones operacionales de la planta y el número de turnos a trabajar por periodo. Se considera que se puede trabajar $W(w = 1, 2, 3)$ turnos por periodo. El tiempo disponible en el periodo t dado que se trabaja w turnos se define como $Tdisp_w^t$. Si se define w_t como el número de turnos a trabajar en el periodo t y $Tdisp_1$ como el tiempo disponible a un turno, el tiempo disponible en el periodo t dado que se trabaja w turnos se puede escribir como $Tdisp_w^t = w_t Tdisp_1 \quad \forall w, t$.

Sea ND_j^t la cantidad de máquinas disponibles con tecnología j al comienzo del periodo t con $ND_j^0 = B_j$ el número de máquinas disponibles en $t = 0$ y NN_j^t la cantidad de máquinas con tecnología j necesarias para satisfacer la demanda en el periodo t . La variable X_{ij}^t representa la cantidad del ítem i producido con máquina de tecnología j en periodo t .

Como la demanda agregada es creciente durante el horizonte de planificación, la expansión de capacidad se puede realizar a través de la adquisición de equipamiento (expansión por inversión) o bien a través del incremento del número de turnos (expansión por gasto operacional). Por lo tanto, en cada periodo del horizonte de planificación se pueden contratar o despedir operarios. Sea H_j^t el número de operarios contratados al comienzo del periodo t para operar máquina

con tecnología j , y L_j^t el número de operarios despedidos al comienzo del periodo t que operaban máquina con tecnología j . Se define O_j^t como el número de operarios necesarios para operar las máquinas de tecnología j en periodo t con $O_j^0 = C_j$ el número de operarios disponibles en $t = 0$, y \bar{O}_j como el número de operarios necesarios para operar una máquina asociada a tecnología j .

Los parámetros de costos son: (i) el costo de inversión en una máquina de tecnología j adquirida en el periodo t ($C_{I_j}^t$), (ii) el costo unitario de mano de obra durante el periodo t (C_{mo}^t), (iii) el costo unitario de producción del ítem i en una máquina con tecnología j en el periodo t ($C_{p_{ij}}^t$), (iv) el costo de oportunidad de tener equipamiento ocioso ($C_{op_j}^t$). El costo de oportunidad se activa cuando $ND_j^t > NN_j^t \forall j, t$. Finalmente, se consideran (v) los costos unitarios de contratación y despido, denotados por C_h y C_f respectivamente.

De esta forma, el modelo queda expresado de la siguiente manera:

$$Z = \min_{X; ND; NN; w; H; L} \sum_{j,t} (ND_j^t - ND_j^{t-1})C_{I_j}^t + \sum_{j,t} (ND_j^t - NN_j^t)C_{op_j}^t + \sum_{j,t} O_j^t C_{mo}^t + \sum_{j,t} H_j^t C_h + \sum_{j,t} L_j^t C_f + \sum_{i,j,t} X_{ij}^t C_{p_{ij}}^t \quad (1)$$

s.a

$$\sum_j X_{ij}^t \geq d_i^t \quad \forall i, t \quad (2)$$

$$\sum_i \frac{X_{ij}^t}{r_{ij}} \leq T_{disp1} w_t NN_j^t \bar{\mu}_j \quad \forall j, t \quad (3)$$

$$ND_j^t \geq ND_j^{t-1} \quad \forall j, t \quad (4)$$

$$ND_j^t \geq NN_j^t \quad \forall j, t \quad (5)$$

$$O_j^t = O_j^{t-1} + H_j^t - L_j^t \quad \forall j, t \quad (6)$$

$$O_j^t = NN_j^t \bar{O}_j w_t \quad \forall j, t \quad (7)$$

$$ND_j^0 = B_j \quad \forall j \quad (8)$$

$$O_j^0 = C_j \quad \forall j \quad (9)$$

$$X_{ij}^t \geq 0 \quad ND_j^t, NN_j^t, w_t, O_j^t, H_j^t, L_j^t \in \mathbb{Z}^+ \quad (10)$$

La función objetivo (1) incluye los costos de inversión, costos de mano de obra, costos de producción y costos de oportunidad durante el horizonte de planificación. La restricción (2) representa la satisfacción de la demanda. La restricción (3) restringe el tiempo total demandado en relación al tiempo total disponible; la restricción (4) indica que no se venden máquinas. La restricción (5) establece que siempre se contará con las máquinas suficientes para satisfacer la demanda. La restricciones (6) y (7) representan respectivamente la continuidad y requerimiento para el número de operarios en cada periodo. Las restricciones (8) y (9) representan condiciones de borde. Finalmente, la restricción (10) corresponde a la naturaleza de las variables.

3. Método de resolución

Una limitación que presenta el modelo es que las restricciones (3) y (7) son de carácter no lineal. Para linealizar estas restricciones, se fija la variable $w_t, \forall t \in T$, convirtiéndose en un parámetro del modelo. Se define entonces una “ruta de expansión” como la sucesión de turnos $\{w_t\}_{t=1}^T$. En particular, para un horizonte de planificación de T periodos, se tiene $R(r = 1, \dots, 3^T)$ “rutas de expansión”. Luego, para cada “ruta de expansión” se obtiene el nivel de producción óptimo, el número óptimo de máquinas disponibles y necesarias, el número óptimo de operarios necesarios y el número óptimo de operarios contratados y despedidos sobre el horizonte de planificación, a través del modelo linealizado que minimiza el costo total actualizado de la ruta r . Así, la estrategia de expansión óptima, denotada por r^* , será la que tenga el menor costo actualizado entre todas las estrategias $r \in R$, durante el horizonte de planificación, i.e., $r^* = \text{Arg min}\{Z_r\}$

4. Estudio computacional

El estudio computacional fue desarrollado con dos objetivos principales, a saber, (i) evaluar el desempeño de la solución respecto al trade-off entre expansión por inversión y gasto operacional, y (ii) probar la aplicabilidad del modelo en un problema de tamaño industrial.

El modelo fue resuelto en un procesador Intel Pentium Dual CPU T3400 2,17 GHz, memoria 1 GB, utilizando 2 sistemas operativos, Windows y Linux, y 2 plataformas computacionales para su formulación y resolución, ZIMPL-SCIP y GAMS-CPLEX.

El modelo fue aplicado a una firma manufacturera de tipo farmacéutica, en la cual se evaluó el proceso de envasado de un producto que posee un alto potencial de crecimiento en el largo plazo. Este producto posee 3 formatos para la venta, que difieren en el peso del envase. Para la fabricación de los ítems, se evalúan 2 tipos de tecnologías las cuales difieren en (i) costo de inversión, (ii) costo de oportunidad, (iii) costo unitario de producción y (iv) número de operarios necesarios para operar la máquina. En este estudio se considera que la duración de cada periodo es de un año y que el horizonte de planificación es de 4 años. Por lo tanto, la dimensión de este problema contempla 88 variables y 52 restricciones. El tiempo computacional de resolución del problema es de aproximadamente 0,04 [s] por ruta de expansión.

4.1. Parámetros del problema

En el estudio computacional del presente trabajo se utilizó el siguiente set de valores como los parámetros del modelo.

- *Demanda.* La Tabla 1 ilustra el valor de la demanda de cada ítem, d_i^t .
- *Razón de producción.* $r_{ij} = 1000$ [gr/min] $\forall i \in I, \forall j \in J$.
- *Utilización máxima.* $\bar{\mu}_j = 0.8, \forall j \in J$.

Demanda [un]			
t	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
1	100000	200000	300000
2	130000	260000	390000
3	169000	338000	507000
4	219700	439400	659100

Tabla 1. Demanda del ítem i en periodo t (d_i^t)

- *Tiempo disponible a un turno.* $Tdisp_1=115.200$ minutos disponibles al año.
- *Número de operarios por máquina.* $\bar{O}_1 = 2, \bar{O}_2 = 1$.
- *Capacidad inicial.* $B_j=0, C_j =0, \forall j \in J$.
- *Costo de capital, c .* El costo de capital utilizado es de un 10 %.
- *Costo de inversión.* $C_{I_j}^t = C_{I_j}^1 * (1 + c)^{1-t}, \forall j \in J, t = \{2, \dots, T\}$, con $C_{I_1}^1 = \$7.000.000$ y $C_{I_2}^1 = \$14.000.000$.
- *Costo de oportunidad.* $C_{op_j}^t = f * C_{I_j}^t, \forall j \in J, t = \{1, \dots, T\}$, donde f representa la relación entre la vida útil y el periodo de depreciación del equipamiento, que toma el valor de 0.1.
- *Costo de mano de obra.* $C_{mo}^t = C_{mo}^1 * (1+c)^{1-t}, \forall t = \{2, \dots, T\}$, con $C_{mo}^1 = \$3.000.000$.
- *Costo unitario de producción.* $C_{p_{ij}}^t = C_{p_{ij}}^1 * (1 + c)^{1-t}, \forall i \in I, \forall j \in J, t = \{2, \dots, T\}$, con $C_{p_{11}}^1 = \$10, C_{p_{21}}^1 = \$35, C_{p_{31}}^1 = \$100, C_{p_{12}}^1 = \$8, C_{p_{22}}^1 = \$28, C_{p_{32}}^1 = \80 .
- *Costos unitarios de contratación y despido.* $C_h = \$200.000, C_f = \350.000 .

4.2. Resultados del modelo

La estrategia de expansión óptima indujo un costo total mínimo de \$293.966.774. Según los resultados, no existe mezcla de tecnologías, utilizándose solo máquinas de tecnología 2. Esto implica que la estrategia de expansión óptima privilegia la tecnología de mayor costo de inversión, que a la vez es la de menor costo unitario de producción y requiere menor número de operarios. La Figura 1 indica los resultados del modelo, en términos del número de máquinas, turnos y operarios. La expansión comienza a partir del tercer periodo, en el cual se produce una reducción del número de turnos, i.e., se reduce el tiempo disponible, lo que es compensado con la adquisición de máquinas, de tal forma de satisfacer la demanda creciente.

Respecto al trade-off entre inversión en maquinaria y gasto operacional, el 60 % de la expansión es justificada por inversión y el 40 % por gasto operacional. La Tabla 2 indica para cada periodo del horizonte de planificación los costos marginales asociados a este trade-off.

Como el método de resolución propuesto en este trabajo es de enumeración completa, se puede obtener la estrategia de mayor costo. Esta estrategia tiene una ruta de turnos dada por la sucesión $\{1, 1, 3, 1\}$ y un costo total actualizado de \$370.896.210. La diferencia entre esta estrategia y la estrategia óptima es de un 26 %.

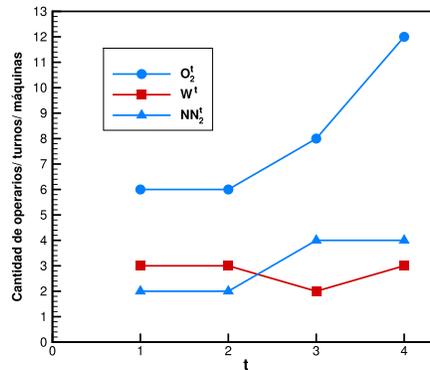


Figura 1. Comportamiento estrategia de expansión óptima

Expansión	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Total	%
Por Inversión	\$ 28.000.000	-	\$ 23.140.496	-	\$ 51.140.496	60 %
Por Gasto Oper.	\$ 19.200.000	-	\$ 5.358.678	\$ 9.815.776	\$ 34.374.454	40 %

Tabla 2. Costos asociados al trade-off

4.3. Análisis de sensibilidad

Con el objetivo de explorar el impacto de los parámetros del modelo en la estrategia de expansión óptima, se realizó un análisis de sensibilidad. Las distintas pruebas que componen este análisis consideran que el costo de inversión de la tecnología 2 es el doble que el costo de inversión de la tecnología 1, i.e., $C_{I_2}^t = 2C_{I_1}^t, \forall t$; el costo unitario de producción de la tecnología 2 es 0.8 veces el costo unitario de producción de la tecnología 1, i.e $C_{p_{i2}}^t = 0,8C_{p_{i1}}^t, \forall i, t$; y finalmente, el número de operarios por máquina de la tecnología 2 es 0.5 veces el número de operarios por máquina de la tecnología 1, i.e., $\bar{O}_2 = 0,5\bar{O}_1$.

La estructura de tiempo disponible durante el horizonte de planificación se representa por: $\sum_{t=1}^T T_{disp_t} = T_{disp1} \sum_{t=1}^T w_t$, la cual es una forma alternativa y agregada para representar la sucesión de turnos $\{w_t\}_{t=1}^T$.

Variación del costo de inversión de la tecnología 2 respecto a la tecnología 1. En esta prueba se aumentó el costo de inversión de la tecnología 2, $C_{I_2}^t, \forall t$, respecto al costo de inversión de la tecnología 1 a: (i) $4C_{I_1}^t$, (ii) $6C_{I_1}^t$ y (iii) $8C_{I_1}^t, \forall t$. Los resultados permiten inferir (Figura 2) que a medida que aumenta el costo de inversión de la tecnología 2 respecto a la tecnología 1, se producen dos fenómenos, a saber, (i) la solución óptima integra ambos tipos de tecnologías y (ii) existe un traspaso paulatino de una tecnología a otra. Respecto

a la estructura de tiempo optimo disponible sobre el horizonte de planificación, se mantiene prácticamente inalterada.

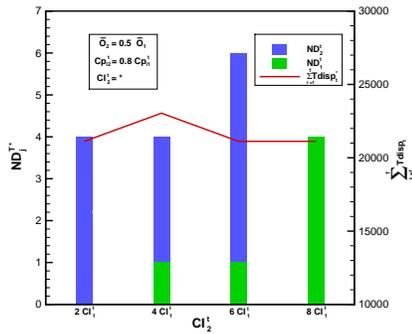


Figura 2. Prueba 1

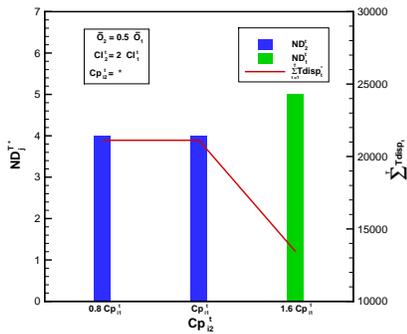


Figura 3. Prueba 2

Variación del costo unitario de producción de la tecnología 2 respecto a la tecnología 1. En esta prueba se aumentó el costo unitario de producción de la tecnología 2, $C_{p_{i2}}^t$, $\forall i, t$, respecto al costo unitario de producción de la tecnología 1 a: (i) $C_{p_{i1}}^t$ y (ii) $1,6C_{p_{i1}}^t$, $\forall i, t$. En este análisis no existe mezcla de tecnologías en los escenarios considerados, es decir, no conviven las dos tecnologías en un mismo periodo de tiempo. Aunque sí existe traspaso total de tecnología al aumentar el costo unitario de producción de la tecnología 2 a $1,6C_{p_{i1}}^t$, $\forall i, t$. Además, en este último escenario cambia drásticamente la ruta óptima de turnos, y por ende, la estructura del tiempo óptimo disponible (Figura 3). En particular, cuando el costo unitario de producción de la tecnología 2 es 1.6 veces el costo unitario de producción de la tecnología 1, la ruta óptima de turnos cambia a $r^* = \{1, 2, 2, 2\}$, lo cual es un cambio significativo en la estructura de tiempo óptimo disponible. Este cambio se puede explicar en dos etapas, (i) la estrategia de expansión óptima privilegia la tecnología de menor costo de inversión (tecnología 1), por lo cual la inversión agregada disminuye, (ii) aumento del gasto operacional agregado, debido a que la tecnología de menor costo de inversión requiere un mayor número de operarios. Este fenómeno se puede visualizar en la Figura 4, que ilustra los costos y tiempos agregados.

Variación del número de operarios por máquina. En esta prueba el número de operarios por máquina de la tecnología 2, \bar{O}_2 aumenta a: (i) \bar{O}_1 y (ii) $2\bar{O}_1$. En ambos escenarios, no existe mezcla de tecnologías, sólo traspaso al aumentar este parámetro a $2\bar{O}_1$. Además, se mantiene la ruta óptima de turnos y por ende la estructura de tiempo óptimo disponible. Ambos fenómenos son representados por la Figura 5.

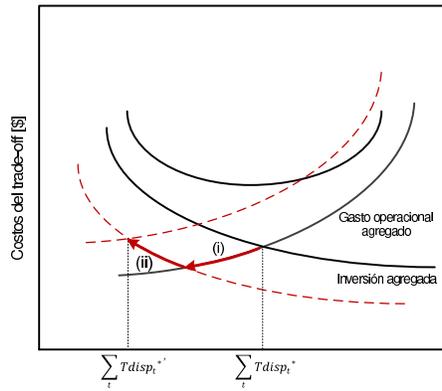


Figura 4. Tiempo óptimo disponible

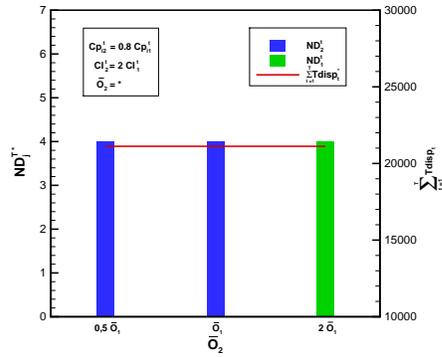


Figura 5. Prueba 3

5. Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se presenta un nuevo modelo de expansión de capacidad para un proceso, de carácter multi-ítem, multi-máquina y multi-periodo, que tiene por objetivo encontrar una estrategia de expansión óptima en términos de maquinaria, turnos y mano de obra, que minimice los costos totales en un horizonte de planificación de largo plazo. El modelo, al considerar un escenario multi-máquina, permite la opción de mezclar tecnologías para la fabricación de los ítems. Estas tecnologías difieren en el costo de inversión, costo unitario de producción y en el número de operarios por máquina. La diferencia en estos parámetros repercute directamente en la estrategia de expansión óptima, lo cual se comprueba en el análisis de sensibilidad realizado.

Analizando la solución óptima, en términos de la ruta óptima de turnos y el resultado de las variables, se comprueba que a medida que se trabaja una menor cantidad de turnos aumentan los requerimientos de maquinaria, puesto que cada máquina está disponible una menor cantidad de tiempo. De manera análoga, se comprobó que al aumentar la cantidad de turnos de trabajo, aumentan los requerimientos de mano de obra.

La estrategia de expansión óptima privilegia la tecnología de mayor costo de inversión, que a la vez es la de menor costo unitario de producción y requiere menor número de operarios. Cuando aumenta su costo de inversión, la estrategia óptima mezcla tecnologías, existiendo un traspaso paulatino de la tecnología de mayor costo a la de menor costo de inversión. Cuando aumenta su costo unitario de producción, el modelo opta por cambiar de tecnología a la de menor costo. Este cambio de tecnología produce un impacto significativo en la estructura de tiempo óptimo disponible durante el horizonte de planificación. Finalmente, al variar el número de operarios por máquina no existe mezcla de tecnologías, sólo traspaso entre una tecnología y otra, manteniéndose la estructura de tiempo óptimo disponible.

El modelo presentado en este trabajo integra dos áreas de investigación, abordando simultáneamente el Problema de Expansión de Capacidad y el Problema de Requerimiento de Máquina. Ambas áreas están estrechamente relacionadas, dado que una expansión de capacidad sobre un horizonte de planificación debe incluir aspectos como los niveles de producción a expandir, la cantidad de máquinas requeridas y los niveles de mano de obra. Sin embargo, en la literatura los modelos planteados no presentan una visión integradora de ambos problemas, excluyendo en ambas áreas, variables representativas de una expansión. Este trabajo considera variables que de forma conjunta, no han contemplado otros autores, lo cual constituye un aporte a este campo de investigación.

Como posibles extensiones de este trabajo se pueden mencionar: (i) la incorporación de un escenario multi-procesos, (ii) el desarrollo de nuevas heurísticas para la resolución del problema de no-linealidad de las restricciones (3) y (7), y (iii) trabajar el mismo modelo pero con demanda no-determinista.

Referencias

1. A.R. Behnezhad and B. Khoshnevis. The effects of manufacturing progress function on machine requirements and aggregate planning problem. *International Journal for Production Research*, 26:309–326, 1988.
2. A.R. Behnezhad and B. Khoshnevis. Integration of machine requirements planning and aggregate production planning. *Production Planning and Control*, 7:292–298, 1996.
3. R. P. Davis and D. Miller. A model for determining machine requirements in a multistage manufacturing system with discretely distributed demand. *Appl. Math. Modelling*, 2:119–122, 1978.
4. R.P. Davis G. M. Hayes and R.A. Wysk. A dynamic programming approach to machine requirements planning. *AIIE Transactions*, 13:175–180, 1981.
5. S. Li and D. Tirupati. Dynamic capacity expansion problem with multiple products: technology selection and timing of capacity additions. *Operations Research*, 42:958–976, 1994.
6. H. Luss. Operations research and capacity expansion problem: A survey. *Operations Research*, 30:907–947, 1982.
7. A. S. Manne. Investments for capacity expansion: Size, location and time-phasing. *MIT Press, Cambridge, MA*, 1967.
8. D. M. Miller and R. P. Davis. The machine requirements problem. *International Journal of Production Research*, 15:219–231, 1977.
9. D. M. Miller and R. P. Davis. A dynamic resource allocation model for a machine requirements problem. *AIIE Transactions*, 10:237–243, 1978.
10. S. Rajagopalan. Capacity expansion with alternative technology choice. *European Journal of Operational Research*, 77:392–403, 1994.
11. M. Tabucanon and J. Ong. Multiproduct, multistage machine requirements planning models. *Appl. Math. Modelling*, 17:162–167, 1993.
12. D.J. Vander Veen and W.C. Jordan. Analyzing trade-offs between machine investment and utilization. *Management Science*, 35:1215–1226, 1989.