

TOMOGRAFÍAS INDUSTRIALES CON EL MÉTODO DE MÁXIMA ENTROPÍA

R. BARBUZZA[†] and A. CLAUSSE^{†‡}

[†] Universidad Nacional del Centro, 7000 Tandil, Argentina

[‡] and CONICET-CNEA

rbarbu@exa.unicen.edu.ar

Resumen.—En este artículo se presenta el método de máxima entropía que incorpora información adicional sobre el modelo del objeto, lo cual es aprovechado para mejorar la calidad de la reconstrucción tomográfica. Se muestra la reconstrucción de un conector metálico, a partir de 5 proyecciones con cierto nivel de ruido, tomadas a distinto ángulo. El método tiene en cuenta el error respecto de las proyecciones originales y la textura suave del material para realizar la reconstrucción tomográfica y obtener una imagen de buena calidad. Esta técnica tiene aplicaciones en casos donde la homogeneidad interna del material es conocida *a priori* desde su diseño y proceso de fabricación.

Palabras clave:—Máxima entropía, reconstrucción tomográfica, procesamiento de imágenes.

INTRODUCCION

La tomografía consiste en una imagen tridimensional interna del objeto reconstruida a partir de un conjunto finito de radiografías tomadas a distintos ángulos del mismo. La tomografía tiene varias aplicaciones tanto en medicina para realizar el diagnóstico de los pacientes, como también en el área industrial para el testeado no destructivo de materiales. En la mayoría de los casos de control de calidad de piezas industriales es necesario que la inspección sea rápida por lo que se debe restringir la cantidad de radiografías tomadas a cada pieza y por esta razón el problema de reconstrucción queda indeterminado. Sin embargo, existen casos donde se cuenta con información *a priori* acerca del objeto (ej. formas internas, porosidad y homogeneidad del material) desde el proceso de diseño [1, 2], lo cual resulta útil para guiar el proceso de reconstrucción. El método de máxima entropía (MEM) fue propuesto por varios autores [3-6], y es una alternativa a otros métodos como las técnicas de reconstrucción algebraica ART, o *Backprojection* [7, 8]. En general, los métodos tradicionales requieren un gran número de proyecciones para poder realizar una reconstrucción, en caso contrario se produce el conocido efecto mariposa [7, 8]. Una ventaja de MEM es la flexibilidad para incorporar información *a priori* disponible agregada a los datos proporcionados por las proyecciones. Existen varias investigaciones han trabajado con información *a priori* en tomografía [9-13]. El principio MEM se usó en algorit-

mos máximo *a posteriori* (MAP) [6, 8], en la forma de *Penalized maximum log-likelihood* (PML) y *Gibbs priors* [9], o con *Penalized Least Squares* (PLS) con funciones *priors* como la entropía de Shannon [5, 6].

Una vez que se define el modelo del objeto, se procede a encontrar la reconstrucción que maximiza un criterio que combina linealmente la entropía y la información *a priori*. De esta manera, en situaciones donde los datos son insuficientes para eliminar toda la incertidumbre, el principio de máxima entropía puede ser usado para que la información disponible *a priori* compense la descripción incompleta. En un estudio previo, el método MEM se combinó con restricciones de homogeneidad en la imagen que tiene en cuenta la información disponible *a priori* [14]. El método obtuvo buenos resultados para el caso de imágenes de prueba, en distintas condiciones de ruido, donde la solución del problema es conocida. En el presente trabajo se propone mejorar el método anterior, estimando el valor de parámetro β que utiliza de manera que optimice la reconstrucción de objetos que tienen homogeneidad en los valores de píxeles cercanos. Este tipo de parámetros son comunes en cualquier modelo [15] y en algunos casos se definen tomando un modelo fijo conocido, o son calculados por algoritmos de prueba y error, o en otros casos por métodos heurísticos que hacen que el método se convierta en un algoritmo práctico. Es importante, entonces determinar de antemano el valor del parámetro β para aplicarlo al método de reconstrucción tomográfica de casos reales, donde la solución del problema no es conocida como en el trabajo previo. Finalmente, se muestra la reconstrucción de un caso real con datos ruidosos y se presentan los resultados obtenidos de un indicador que combina el error respecto de las proyecciones reales y un valor indicativo de la homogeneidad de la solución.

MATERIALES, MÉTODOS Y RESULTADOS

Sea f que describe una imagen no conocida a reconstruirse, la cual se representa por un vector columna n -dimensional. Sea R una matriz de $m \times n$, cuyos elementos r_{ij} denotan los coeficientes de contribución del j -ésimo pixel al i -ésimo rayo (Fig. 1). Luego, la transformada discreta de Radon de f se define como:

$$R f = g, \quad (1)$$

donde g es un vector m -dimensional de proyecciones (ej., m rayos se proyectan a través de f). En general, $m < n$. El problema de CT consiste de encontrar f dada R y g .

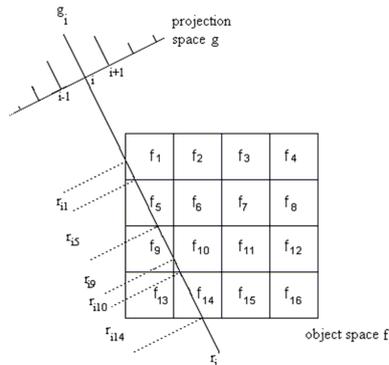


Fig. 1. *i*-ésimo rayo a través del objeto discretizado *f*

En la práctica, los datos de entrada *g* están incompletos y ruidosos, por lo que existen muchas soluciones *f* con grado equivalente de consistencia con (1). El método de reconstrucción MEM consiste en determinar una solución de *f* donde la entropía de Shannon:

$$H(f) = -\sum_{j=1}^n f_j \log f_j , \quad (2)$$

es máxima entre todas las soluciones que se aproximan a (1). En [14] se propuso un método para aplicar MEM combinado con un filtro de suavizado *a priori*, $U(f)$, esto es:

$$\min_f -H(f) + \beta U(f) \quad , \quad (3)$$

$$\begin{cases} f \geq 0 \\ Rf - g \approx 0 \end{cases}$$

El parámetro β es una constante de calibración. $U(f)$ se modela por medio de interacciones entre píxeles vecinos como:

$$U(f) = f^T M f , \quad (4)$$

Así, la matriz M de $n \times n$ es un operador de regularización [16-20]. En este artículo se definió M usando el error cuadrático entre píxeles vecinos en bloque de 3×3 píxeles. N_j es el conjunto de vecinos del *j*-ésimo píxel. Esta función se hace mínima cuando los píxeles cercanos son homogéneos, que es lo que se usa como información para la reconstrucción tomográfica.

$$m_{jv} = \begin{cases} 2 |N_j| & \text{if } v = j \\ -2 & \text{if } v \in N_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (5)$$

donde v es un píxel vecino a j en el bloque N_j y $|N_j|$ es la cantidad de píxeles del bloque.

Existe una solución para (3) suponiendo que $Rf = g$, la cual no es una restricción conveniente cuando la entrada g es ruidosa. La forma de tratar con este problema fue resuelta forzando f y g a valores enteros dentro de la escala de grises. El procedimiento mostró buenos resultados en la reconstrucción de imágenes de prueba conocidas. Como ejemplo se muestra la reconstrucción de una imagen de prueba (la solución f^* es conocida) a partir de 16 proyecciones a las que se les adicionó ruido con distribución uniforme, tomando $\pm 2\%$ de los valores de la proyección sin ruido (Fig. 2). El parámetro β se usa para controlar el filtro de suavizado. Se puede observar que la imagen reconstruida es ruidosa para $\beta = 0$ y se esfuma para $\beta = 10^5$. Entre estos valores, hay un valor de β óptimo que maximiza la calidad de la imagen resultante, la cual se puede cuantizar mediante:

$$\sigma = \sum_j (f_j - f_j^*)^2, \quad (6)$$

La Figura 3 muestra la variación de σ para las diferentes imágenes reconstruidas con diferentes β . El valor óptimo de β es cercano a 10^3 .

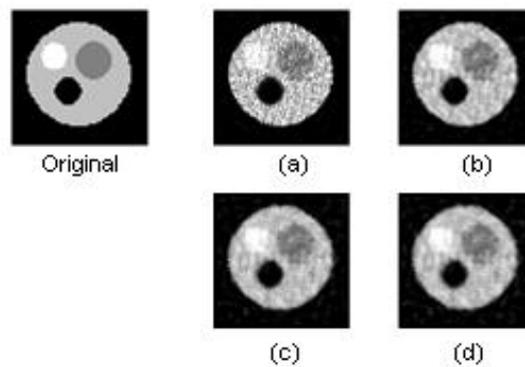


Fig. 2. Reconstrucción de una imagen de prueba a partir de 16 proyecciones con ruido uniforme. (a) $\beta=0$, (b) $\beta=10^3$, (c) $\beta=10^4$, and (d) $\beta=10^5$.

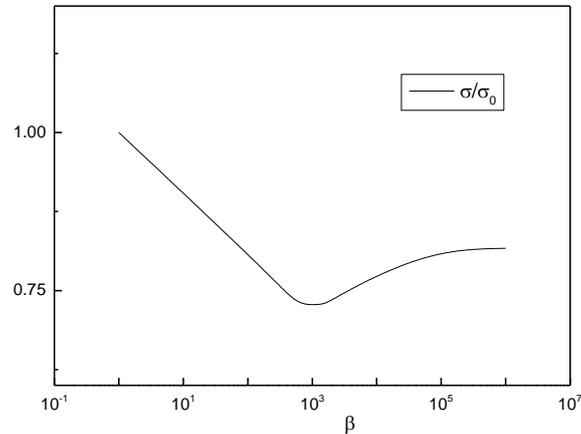


Fig. 3. Calidad de las imágenes reconstruidas en Fig. 2 (σ_0 es el valor inicial de σ).

El caso de prueba mostrado en la Fig. 2 mostró la factibilidad del método, pero no es suficiente para mostrar la performance del mismo en un caso real, donde la imagen f^* no es conocida *a priori*, y la ecuación (6) no puede ser usada, para determinar el valor de β óptimo. Alternativamente en este trabajo, se construyó una métrica de calidad que usa el error cuadrático entre proyecciones g_i^* conocidas y las correspondientes proyecciones g_i de la solución obtenida, como:

$$\varepsilon = \sum_i (g_i - g_i^*)^2, \quad (7)$$

En la Fig. 4 se muestra la evolución del error entre proyecciones definido en (7) para el ejemplo de la Fig. 2, donde se da el mínimo para $\beta=800$. Se presenta entonces un problema ya que el mínimo de (7) no coincide con el mínimo de (6). Para mejorar la estimación del valor de β se adicionó al error entre proyecciones definido en (7), el comportamiento de la función U definida en (4). En la misma figura, se puede ver como disminuye progresivamente el valor U al aumentar el valor de β ya que la imagen resulta más homogénea en sus píxeles vecinos.

Dado que la evolución de las curvas de la Fig. 4 tienen un comportamiento similar para otras reconstrucciones realizadas, se consideró la siguiente función de estimación del valor de β que combina las ecuaciones (7) y (4) según:

$$e(n) = \varepsilon^n + U, \quad (8)$$

n se definió de forma que la curva aproximara al β que hace mínima (7) que en este caso de imágenes de prueba es conocido resultando $n=0.3$. Los valores de ε y U corresponden a cada imagen reconstruida con un valor de β fijo, y fueron normalizados

con los valores iniciales ε_0 y U_0 , respectivamente. Se puede ver en la Fig. 5 el análisis realizado para el ejemplo de la Fig. 2, en donde se muestran dos estimaciones usando (8) para $n=1$ y 0.3.

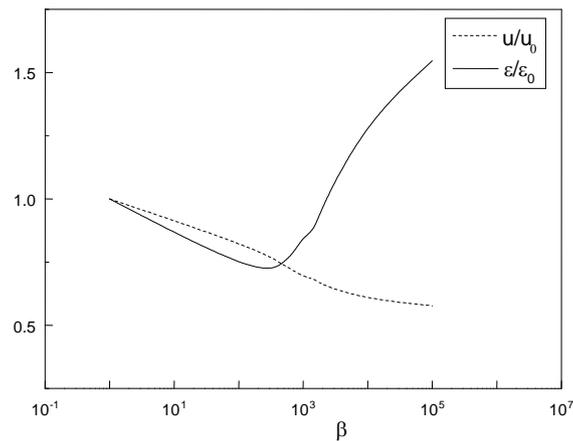


Fig. 4. Valores de ε y U para las imágenes reconstruidas de la Fig. 2 (ε_0 y U_0 son los valores iniciales de ε y U respectivamente).

Este comportamiento fue analizado para distintas reconstrucciones de imágenes conocidas con valores homogéneos en píxeles vecinos, resultando aceptable la estimación definida en (8) con $n=0.3$ para obtener el parámetro β en todas ellas. Este método de determinación del parámetro β convierte el método MEM extendido en un algoritmo heurístico, ya que es necesario conocer de antemano un valor del parámetro β para la realizar la reconstrucción tomográfica.

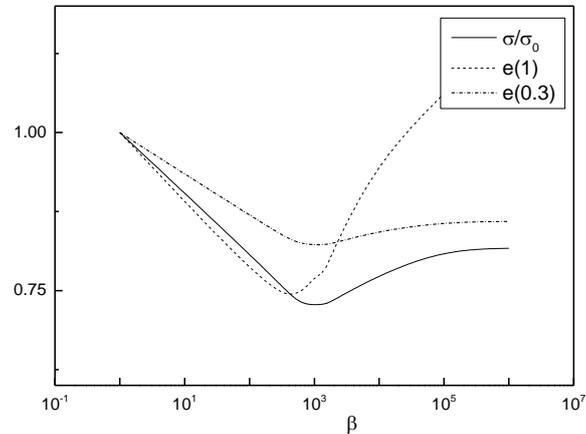


Fig. 5. Valores de σ y dos estimaciones según (8) para las imágenes reconstruidas de la Fig. 2.

Este procedimiento de estimación del β fue considerado para el caso de estudio de una reconstrucción tomográfica de un conector BNC metálico, usado para el cableado de redes de computación (Fig. 6). Se usó un conjunto de 5 radiografías obtenidas a diferentes ángulos de rotación 0° , 30° , 60° , 90° y 120° alrededor del eje mayor del objeto [2, 20, 21] las cuales fueron los datos de entrada g para resolver las (3), (4) y (5) aplicando el método de Newton [14,17]. La resolución de las radiografías usadas es de 0.08 mm/píxel. Esta cantidad de proyecciones es muy reducida respecto de la que usan los métodos tradicionales.

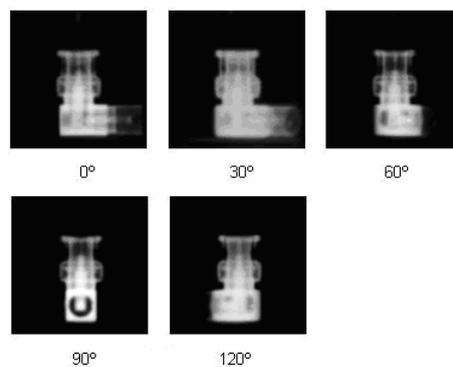


Fig. 6. Radiografías del conector BNC tomadas a diferentes ángulos del mismo.

La principal fuente de ruido en las radiografías es la variación de intensidad y de falta de alineación entre las mismas. Las radiografías fueron pre-procesadas para normalizar la intensidad total de las placas como también para encuadrarlas tomando como

referencia el eje de rotación del objeto. La reconstrucción se realizó para todos los cortes axiales del objeto.

La Fig. 7 muestra un corte axial reconstruido con el método MEM para diferentes valores del parámetro de β tal como se realizó en el caso de prueba de la (Fig. 2). Se puede ver que para el valor inferior y superior de β la solución es ruidosa o borrosa respectivamente. En la misma figura se muestra el mismo corte reconstruido con el método ART [22], con la misma cantidad de proyecciones, en donde se puede apreciar el efecto mariposa. La Fig. 8 muestra el indicador normalizado usando (8) para la reconstrucción variando β . Un comportamiento similar se presentó en el caso de prueba de la Fig. 2. En la Fig. 9 se muestran dos cortes virtuales de la tomografía final del conector obtenida para el valor óptimo $\beta = 100$ (ver Fig 8).

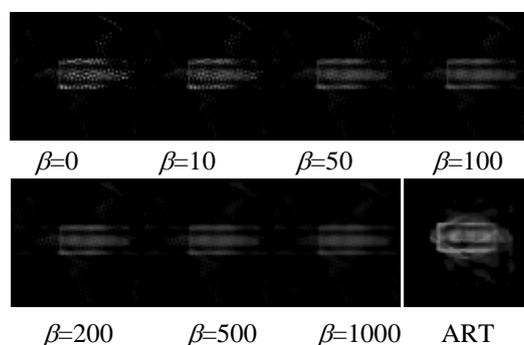


Fig. 7. Cortes internos a lo largo del eje del conector mostrado a medida que varía el parámetro del filtro β . La figura inferior derecha es el corte reconstruido con ART

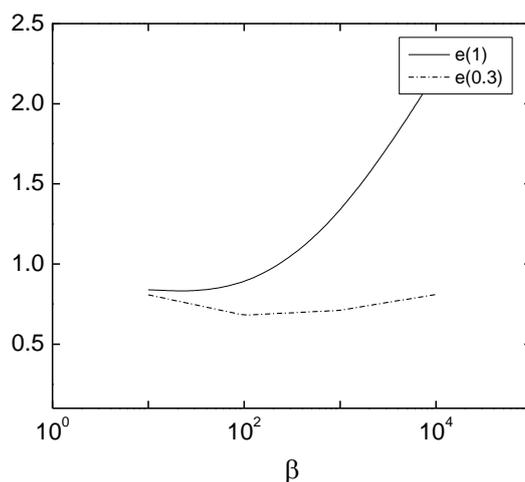


Fig. 8. Indicador combinado con las proyecciones reales y la suavidad de la imagen (4) y (7) en de la reconstrucción del objeto (ε_0 y U_0 son los valores iniciales de ε y U en la reconstrucción)



Fig. 9. Cortes de la tomografía del objeto conector BNC mostrado en la Fig. 6 obtenido con el método MEM con información y $\beta=100$.

CONCLUSIONES

Se presentó el algoritmo MEM extendido, combinado con el filtro de homogeneidad aplicado a la reconstrucción de un objeto real a partir de 5 radiografías tomadas a diferentes ángulos de rotación. El método fue probado con imágenes de prueba mostrando buenos resultados en un trabajo previo, pero carecía de una propuesta apropiada para determinar el valor del parámetro óptimo para realizar la reconstrucción. En el presente trabajo, se propone un indicador alternativo de calidad que combina el error entre proyecciones y la homogeneidad de la imagen. El algoritmo propuesto puede ser útil para aplicaciones de tomografías industriales; donde la homogeneidad del material es conocida *a priori* desde el diseño y el proceso de fabricación de la pieza.

REFERENCIAS

1. Barbuza, R., Vénere, M., Clause A., "Quality assurance of manufactures by means of intelligent tomographic processing", *J. Testing Evaluation*, **35**, 59-65, (2007b)
2. Barbuza R. and Clause A., "Metropolis Monte Carlo for tomographic reconstruction with prior smoothness information", *IET Image Processing*, **5**, 198-204, (2011).
3. Dusausoy, N. and Abdou I., "The extended MENT algorithm: a maximum entropy type algorithm using prior knowledge for computerized tomography", *IEEE Trans. Signal Processing*, **39**, 1164-1180, (1991).
4. Minerbo, G., MENT: "A maximum entropy algorithm for reconstruction a source from projection data", *Comp. Graph. Image Processing*, **10**, 48-68, (1979).
5. Mohammad-Djafari A., Giovannelli J., Demoment G., Idier J., "Regularization, maximum entropy and probabilistic methods in mass spectrometry data processing problems", *Int. J. Mass Spectrometry*, **215**, 175-193, (2002).
6. Nguyen M. and Mohammad-Djafari A., "Bayesian Approach with the maximum entropy principle in image reconstruction from microwave scattered field data", *IEEE Trans. Medical Imaging*, **13**, 254-262, (1994).

7. Herman G., *Image Reconstruction from Projections*, Academic Press, London, (1980).
8. Herman G. and Kuba A., *Discrete Tomography, Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser Boston, (1999).
9. Bouman C. and Sauer K., "A Generalized Gaussian Image model for Edge- Preserving MAP estimation", *IEEE Trans. Image Processing*, **2**, 296-310, (1993).
10. Frese T., Bouman A., Sauer K., "Adaptive Wavelet Graph Model for Bayesian Tomographic Reconstructions", *IEEE Trans. Image Processing*, **11**, 756-770, (2002).
11. Jaynes, E., "Information theory and statistical mechanics", *Physical Review*, **106**, 620-630, (1957).
12. Liao, Z., Hu, S., Sun, D., Chen, W., "A numerical method for preserving curve edges in nonlinear anisotropic smoothing", *Mathematical Problems in Engineering*, **1**. 2011, Article ID 186507 (2011).
13. Liao Z., Hu S., and Chen W., "Determining neighborhoods of image pixels automatically for adaptive image denoising using nonlinear time series analysis", *Mathematical Problems in Engineering*, **1**. 2010, Article ID 914564, 14 pages, (2010).
14. Barbuzza R., Lotito P., Clausse A., "Tomography reconstruction by entropy maximization with smoothing filtering", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **18**, 711-722, (2010).
15. Winkler G., *Image Analysis, Random fields and markov chain monte Carlo Methods*, Springer, NY, (2003).
16. Cidade G., Anteneodo C., Roberty N., Silva A., "A generalized approach for atomic force microscopy image restoration with Bregman distances as Tikhonov regularization terms", *Inverse Probl. Eng.*, **8**, 457-472, (2000).
17. Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, John Wiley & Sons, (1980).
18. Katsaggelos A., and Galatsanos N., *Signal Recovery Techniques for Image and Video Compression and Transmission*, Springer-Verlag New York, LLC, (1998).
19. Katsaggelos A., Kohonen T., Schroeder M., Huang T., *Digital Image Restoration*, Springer-Verlag New York, LLC, (1991).
20. Barbuzza R., Vénere M., Clausse A., "Tomographic reconstruction using heuristic Monte Carlo methods", *Journal of Heuristic*, **13**, 227-242, (2007a).
21. Vénere M., Moreno C., Clausse A., Barbuzza R., del Fresno M., "Tomographic System Based in Plasma-Focus X-Rays", *Nukleonika*, **46**, 93-94, (2001).
22. H.Y. Liao, "A gradually unmasking method for limited data tomography," in Proc. Fourth IEEE Int. Symp.on Biomed. Imag., Arlington, VA, 2007, pp. 820-823.